J. Basic Appl. Sci. Vol.26, I (1) June 2026. Ar. 10-18
مجلة العلوم الأساسية والتطبيقية
Journal of Basic and Applied Sciences
https://lafsrj.lafsrj.ly/index.php/JBAS/en

دالة جرين وتطبيقاتها

هناء أبودية[1*]، مروة العومري[2]

[1] قسم رياضيات، كلية التربية يفرن، جامعة الزنتان.

[2] قسم العام، كلية تقنية الحاسوب، طرابلس، التعليم التقني والفني، ليبيا

المستخلص: في هذا البحث، قمنا بدراسة مفهوم دالة جرين واستخدامها في حل المعادلات التفاضلية، ونسلط الضوء في هذه الدراسة على بعض تطبيقات دوال جرين في العلوم التطبيقية لإبراز أهميتها، حيث تسهم بشكل كبير في تبسيط عملية إيجاد حلول دقيقة وواضحة للمسائل، لاسيما في مشكلة الحدود والقيمة الأولية ومعادلة الموجة ومعادلة الانتشار، وأيضاً معادلات لابلاس وبواسون.

سجل المقال:
أستلم: 2025/11/18م
قبل للنشر: 2026/01/22م

الكلمات المفتاحية:
دالة جرين:
معادلة الانتشار
معادلات بواسون:
معادلة شرودنجر:
معادلات لابلاس:

Green's Function and Its Applications

Hana Aboudia, and Marwa Al-Omari

Abstract: In this research, we studied the concept of Green's function and its use in solving differential equations. In this study, we highlight some applications of Green's functions in applied sciences to emphasize their importance, as they significantly contribute to simplifying the process of finding precise and clear solutions to problems, particularly in boundary value and initial value problems, the wave equation, the diffusion equation, as well as Laplace's and Poisson's equations.

Keywords:
Green's function;
Diffusion equation;
Poisson's equations;
Schrödinger equation;
Laplace's equations;

1. المقدمة:

دالة جرين دالة رياضية قدمها جورج جرين في الفترة (1793 _ 1841م)، جورج جرين عالم الفيزياء والرياضيات بريطاني نشر في عام 1828م مقالاً عن تطبيق التحليل الرياضي لنظرية الكهرباء والمغناطيسية في الفيزياء الرياضية، وقدم في المقال العديد من المفاهيم المهمة من بينها نظرية جرين ومفهوم دوال جرين.

تُعد دالة جرين أداة رياضية محورية في تحليل وحل المعادلات التفاضلية العادية والجزئية في أبعاد مختلفة ولحل المشكلات المعتمدة على الزمن والمستقلة عنه. تهدف هذه الدراسة إلي تسليط الضوء على أهمية تطبيقات دالة جرين من خلال استعراض خصائصها واستكشاف قدرتها على تبسيط الحلول لمسائل معقدة وإيجاد حلول دقيقة لمجموعة من المعادلات الأساسية مثل معادلة الموجة ومعادلة الانتشار ومعادلات لابلاس و بواسون بالإضافة إلي معادلتي جاكوبي و شرودنجر.

2. تعريف [1- 2]:

نفرض المعادلة التفاضلية التالية في الفترة $[a, b]$

* قسم الرياضيات، كلية التربية- يفرن، جامعة الزنتان hana_abudayay@uoz.edu.ly

حقوق النشر© 2026 للمؤلف (المؤلفين). هذه المقالة متاحة للجميع بنظام الوصول المفتوح بموجب شروط رخصة المشاع الإبداعي بنسبة المؤلف 4.0 الدولية (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

$ly = y`` + p_1(x)y` + p_2(x)y = r(x)$ ..... (1)

حيث $r(x),\ p_2(x),\ p_1(x)$ تكون متصلة وقابلة للتفاضل على (a,b)

تستخدم طريقة تغير المعادلات للحصول على الحل الخاص لـ $ly = r(x)$ على (a,b)

إذا قمنا بتعويض $y = r_1y_1 + r_2y_2$ في المعادلة $r_1y_1 + r_2y_2 = 0$

نحصل على:

$$v_1 = \int \frac{-y_2 r(x)}{w(y_1,y_2)}dx \quad , \quad v_2 = \int \frac{y_1 r(x)}{w(y_1,y_1)}dx$$

أو

$$y_{(p)} = y_1 \int \frac{-y_2 r(x)}{w(y_1,y_2)}dx + y_2 \int \frac{y_1 r(x)}{w(y_1,y_2)} \quad \text{..... (2)}$$

حيث أن v_1 و v_2 تمثل الحلول الأساسية للمعادلة المتجانسة ly=0 على الفترة (a,b)

إذا قمنا بتكامل محدود في التكامل الأول من b إلى x والتكامل الثاني من a إلى x ويمكن تغيير حدود التكامل (b,x) إلى $(x,,a)$ وإذا قمنا بتغيير الإشارة من هنا نحصل على

$$y_{(p)} = \int_a^x \frac{y_1(X)y_2(x)}{w(x)} r(x)dX + \int_x^b \frac{y_1(x)y_2(X)}{w(x)} r(X)dX \quad \text{..... (3)}$$

فإذا عرفنا

$$g(x,X) = \begin{cases} \dfrac{y_1(X)\ y_2(x)}{w(X)} & a < X < x \\ \dfrac{y_1(x)\ y_2(X)}{w(X)} & x < X < b \end{cases}$$

فإن المعادلة (3) تكون

$$y_{(p)}(x) = \int_a^b g(x,X)r(X)d(X)$$

الحل العام لـ $ly = r(x)$ على (a,b) يكون

$$y = y_{(p)} + y_{(h)} = \int_a^b g(x,X)r(x)dX + c_1y_1 + c_2y_2$$

فإن $g(x,\mathrm{X})$ التي تم تحديدها من خلال هذا التحليل تسمى بدالة جرين.

1.2. خواص دوال جرين [3] [10]:

1.1.2. الدالة $g(x,\mathrm{X})$ وتكون متصلة لكل x (من ضمنها $x = X$).

2.1.2. مشتقة $g(x,\mathrm{X})$ وبالنسبة لـ x تكون متصلة لكل $x \neq X$

$$g`(x,X^-) = \lim_{X\to x^-} \frac{cos(k_x).sin\big(k(L.x)\big)}{sin(kl)}$$

$$g`(x,X^+) = \lim_{X\to x^+} \frac{sin(k_x).cos\big(k(L.x)\big)}{sin(kl)}$$

3.1.2. دالة جرين تحقق الشروط الحدية للعلاقة

$$g(x,0) = 0 \ , \ g(x,l) = 0$$

لذا فإن:

$$g(x,0) = g(x,l)$$

1- دالة جرين متماثلة للمتغيرين $x, \mathrm{X}`$ أي أن

$$g(x,X) = g(\mathrm{X},x)$$

3. تطبيقات دالة جرين [2] [5] [7] [8]:

1.3. دالة جرين لمعادلة الموجة المستقلة عن الزمن.

في هذا القسم سنركز على حساب دوال جرين لمعادلة الموجة المستقلة عن الزمن في بعد واحد وبعدين وثلاثة أبعاد الحل على كل الفضاء ودالة جرين ليست مقيدة بشروط حدية، لذلك يشار إليها باسم دالة جرين في الفضاء الحر.

1.1.3. دالة جرين ذات بعد واحد (أحادية البعد)

معادلة الموجة غير متجانسة:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x} + k^2\right)u(x,k) = f(x) \quad \dots\dots\dots\

$$g(x\backslash x_0, k) = 0 \ , \ \frac{\partial}{\partial x} g\left(x\backslash x_{0,k}\right) = 0 \quad \dots\dots\dots\

في ثلاثة أبعاد تعطي دالة جرين للفضاء الحر لحل المعادلة

$$(\nabla^2 + k^2)g(\vec{r} / \vec{r}_0, k) = -\delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

مع مراعاة بعض الشروط الحدودية عند $|\vec{r}| = \infty$

حيث $\vec{r}, \vec{r}_0 \in R^3$

وبالتالي يمكن كتابة دالة جرين بالشكل الآتي

$$g(\vec{r}/\vec{r}_0\,, k) = \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}_0|} exp(ik|\vec{r} - \vec{r}_0|)$$

2.3. حل دالة جرين لمعادلة الانتشار:

1.2.3. معادلة الانتشار المتجانسة:

$$\nabla^2 u(\vec{r}, t) = a\frac{\partial}{\partial t}u(\bar{r}, t)$$

حيث a يختلف في العديد من الجوانب عن معادلة الموجه القياسية، وتبين دوال جرين هذه الاختلافات، وتتميز معادلة الانتشار بعدم التماثل فيما يتعلق بالزمن بالنسبة لمعادلة الموجه إذا كانت $u(\vec{r}, t)$ حلاً فإن $u(\vec{r}, -t)$ تكون كذلك حلاً، ومع ذلك إذا كانت $u(\vec{r}, t)$ حلاً لـ

$$\nabla^2 u(\vec{r}, t) = a\frac{\partial}{\partial t}u(\bar{r}, t)$$

فإن الدالة $u(\vec{r}, -t)$ حل لمعادلة مختلفة تماماً

$$\nabla^2 u(\vec{r}, t) = a\frac{\partial}{\partial t}u(\bar{r}, -t)$$

ولذلك، على خلاف معادلة الموجه، فإن معادلة الانتشار تتميز بين الماضي والمستقبل، وذلك لأن المجال المنتشر u يمثل بعض خصائص المتوسط لمجموعة من الجسيمات العديدة التي لا يمكنها عموماً العودة إلى حالتها الأصلية، لذا يجب أن يؤخذ في الاعتبار السببية في حل معادلة الانتشار، وهذا يؤدي بدوره إلى استخدام تحويل لابلاس لحل المعادلة بالنسبة إلى t (مقارنة بتحويل فوريه المستخدم لحل معادلة الموجه بالنسبة إلى t).

2.2.3. الحل العام لمعادلة الانتشار غير المتجانسة:

في حالة ثلاثة أبعاد لنفترض أن الحل العام للمعادلة

$$\left(\nabla^2 - a\frac{\partial}{\partial t}\right)u(\vec{r}, t) = -f(\vec{r} - t)$$

حيث f هو مصدر دالة لمجموعة متراصة $(\vec{r} \in v)$ ونعرف دالة جرين كحل للمعادلة

$$\left(\nabla^2 - a\frac{\partial}{\partial t}\right)G(\vec{r} \setminus \overrightarrow{r_0}, t - t_0) = \delta^3(\vec{r} - \overrightarrow{r_0})\delta(t - t_0)$$

من المناسب أولاً اجراء تحويل لابلاس لهذه المعادلة بالنسبة إلى $\tau = t - t_0$

$$\nabla^2 \bar{U} - a(-u_0 + p\,\bar{U}) = -\bar{f} \quad \ldots\ldots\ldots\

$$\cup(\vec{r},p)=\int_0^{\infty}u(\vec{r}\setminus\vec{r}_0,\tau)exp(-p\tau)d\tau$$

$$G(\vec{r}\setminus\vec{r}_0,p)=\int_0^{\infty}G(\vec{r}\setminus\vec{r}_0,\tau)exp(-p\tau)d\tau$$

$$\bar{f}(\vec{r},p)=\int_0^{\infty}f(\vec{r},\tau)exp(-p\tau)d\tau$$

$$u_0=u(\vec{r},t=0)=0\quad,\quad G_0=G(\vec{r}\setminus r_0,t=0)=0$$

بضرب المعادلة (8) في $\vec{G}$ والمعادلة (9) في $\overline{U}$ وطرح النتيجتين والتكامل نحصل على:

$$\int_v(\bar{G}\nabla^2\,\overline{\cup}-\overline{\cup}\,\nabla^2\bar{G})d^3\vec{r}+a\int_v u_0\bar{G}d^3\vec{r}=-\int_v f\bar{G}d^3\vec{r}+\overline{\cup}\,(\vec{r}_0,p)$$

باستخدام نظرية جرين وإعادة ترتيب النتيجة نحصل على:

$$\overline{\cup}\,(\vec{r}_0,\tau)=\int_v f(\vec{r},p)\bar{G}(\vec{r}\setminus\vec{r}_0,p)d^2\vec{r}+a\int_v u_0(\vec{r})\,\bar{G}(\vec{r}\setminus\vec{r}_0,p)d^3\vec{r}+\oint_s\bar{g}\nabla\,\overline{\cup}-\overline{\cup}\,\nabla\bar{g}).\bar{n}d^2\vec{r}$$

أخيراً، إجراء تحويل لابلاس العكسي واستخدام نظرية الالتفاف لتحويلات لابلاس نصل إلى:

$$\nabla^2u=0$$

$$\nabla^2u=-f\quad\ldots\ldots\ldots

يكون

$$g(\vec{r}|\vec{r}_0,k)=\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|}exp(ik|\vec{r}-\vec{r}_0|)$$

نتوقع أن تكون دالة جرين لمعادلة بواسون ثلاثية الأبعاد (ومعادلة لابلاس) تكون على الصياغة الآتية:

$$g(\vec{r}|\vec{r}_0)=\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|} \quad \dots\dots\dots\

$$G\left(x,x`\right)=2^{-2(\alpha+\beta)}\frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma\left(\mu+2\alpha+2\beta+1\right)}{\Gamma(\mu+2\alpha+1)\Gamma\left(\mu+2\beta+1\right)}P_{\mu}^{(3\alpha,2\beta)}(x)Q_{\mu}^{(2\alpha,2\beta)}(x)\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(12)$$

حيث:

$$x_{>}=max\left(x,x_0\right)$$

$$x_{<}=min\left(x,x_0\right)$$

مع العلم أن دالة جاكوبي لها الصورة التكاملية التالية

$$2^{-n}\frac{\Gamma\left(v+n+1\right)\Gamma\left(2x+2\right)}{\Gamma\left(v+m+1\right)\Gamma(v-m+1)}Q_{v-n}^{(n-m,\ n+m)}(x)=\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}exp(-xt)t^{n-1}M_{m,v+\frac{1}{2}}(2t)dt$$

$$2^{-n}\frac{\Gamma\left(v+n+1\right)}{\Gamma\left(v-m+1\right)}P_{v-n}^{(n-m,\ n+m)}(x)=(-1)^{v-n+1}\frac{1}{2i}\int_{\infty}^{0}\exp(-xt)t^{n-1}M_{n,v+\frac{1}{2}}(2t)\ dt$$

حيث $M_{\mu,v}(x)\,W_{\mu,v}(x)$ هي دوال ويتاكرو حيث أن الأولى منتظمة عند نقطة الأصل أما الثانية فهي منتظمة عند ∞

من العبارات السابقة والمعادلة (12) نتحصل على الصيغة الجبرية لدالة جرين على الصورة:

$$G\left(x,x_0\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(v-n+1)\Gamma(v-m+1)}{\Gamma(2v+2)\Gamma(v+n+1)}(-1)^{v-n+1}\frac{1}{2\pi i}\int_{0}^{\infty}\int_{\infty}^{0}\exp(-xt-x_0t_0)(t\,t_0)M_{m,v+\frac{1}{2}}(2t)W_{n,v+\frac{1}{2}}(2t)dtd\,t_0$$

5.3. حل دالة جرين لمعادلة شرودنجر التفاضلية:

بما أن معادلة شرودنجر هي معادلة تصف الحركة الموجبة المرتبطة بحركة الجسيم والمعادلة التي توصل إليها شرودنجر هي :

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+k^2-\frac{l\,(l+1)}{r^2}\right)\psi(r)=\int_{0}^{\infty}k\left(r,r_0\right)\mu\left(r_0\right)dr_0$$

لتكن $\psi\left(k,r\right)=N\,\emptyset\left(k,r\right)$ حيث N ثابت معياري و $\emptyset\left(k,r\right)$ تحقق

$$\frac{d^2\emptyset\left(k,r\right)}{dr^2}+\left(k^2-\frac{l\left(l+1\right)}{r^2}\right)\emptyset\left(k,r\right)=g(r)\ ,\quad\emptyset(k,r)=0$$

وهذا المعادلة لها الحل

$$\emptyset\left(k,r\right)=\int_{0}^{1}G(r,r_0)g(r_0)dr_0$$

حيث $G\left(r,r_0\right)$ دالة جرين تحقق

$$\frac{d^2}{dr^2}G\left(r,r_0\right)+\left(k^2-\frac{L\left(L+1\right)}{r^2}\right)G(r,r_0)=0\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(13)$$

ولحل هذه المعادلة نضع $G\left(r,r_0\right)=r\,\emptyset\left(r,r_0\right)$ في المعادلة (13) لنحصل على :

$$\frac{d^2\,\emptyset\left(r,r_0\right)}{dr^2}+\frac{2d\,\emptyset\left(r,r_0\right)}{rdr}+\left(k^2-\frac{l\left(l+1\right)}{r^2}\right.\emptyset\left(r,r_0\right)=\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(14)$$

ولو وضعنا $\emptyset\ (r\ ,r_0) = r^{-\frac{1}{2}}\ g\ (r\ ,r_0\ )$ في المعادلة (14) يكون لدينا:

$$\frac{d^2 g\ (r\ ,\ r_0)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dg\ (r\ ,r_0)}{dr} + \left(k^2 - \frac{\left(l+\frac{1}{2}\right)^2}{r^2}\right) g(r,r_0) = 0$$

وهي إحدى صور معادلة بسيل من الدرجة $l + \frac{1}{2}$ وحلها هو

$$g(r\ ,r_0\ ) = A\ J_{l+\frac{1}{2}}\ (kr\ ) + B\ N_{l+\frac{1}{2}}\ (kr\ )$$

وحيث

$$J_{l+\frac{1}{2}}\ (kr) = \left(\frac{2\ kr}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\ j(kr)$$

$$N_{l+\frac{1}{2}}\ (kr) = \left(\frac{2kr}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\ \eta(kr)$$

من العبارات السابقة نصل إلى الصورة النهائية لدالة جرين لمعادلة شرودنجر التفاضلية

$$G(r\ ,r_0\ ) = \begin{cases} Arj(kr) & ;\ \ r\ <\ r_0 \\ \\ Br\eta(kr) & ;\ \ r\ >r_0 \end{cases}$$

4. النتائج والتوصيات

في هذه الدراسة تم عرض بعض تطبيقات دالة جرين، ونلاحظ من خلال دراستنا أن استخدام دوال جرين لحل معادلة الموجة والانتشار وبواسون تظهر النتائج توفر طرق فعالة لحل المسائل المعقدة، وتنالنا أيضا إيجاد حلول لمعادلة جاكوبي التفاضلية و معادلة شرودنجر التفاضلية، وتبرز الورقة الأهمية العلمية لدوال جرين في تحسين دقة النماذج الرياضية المستخدمة في العلوم التطبيقية، ودالة جرين تعد من الأدوات الأساسية في الرياضيات التطبيقية لتحليل وحل النظم الفيزيائية المعقدة، وقد يكون بحثنا هذا نقطة لانطلاق بحوث أخرى بأفكار جديدة مثل حل معادلة الحركة ونظرية التشتت في ميكانيكا الكم.

5. المراجع:

[1]. Roach, G. 1982. Green's function. Cambridge.

[2]. Duffy, D. 2015. Green's Functions with Applications. CAC Press.

[3]. Carrier, G. Pearson, G. 1976. Partial Differential Equations. New York.

[4]. [4] Olver, P. 2014. Introduction to Partial Differentia Equations. Springer Cham Heidelberg, New York

[5]. Stakgold, I. Holst, M. 2011. Green's Functions and Boundary value problems. John wiley and sons Hobokon.

[6]. Panakhor, E. Yilmazer, R. 2011. On the Determination of the Hydrogen Atom Equation from Two Spectra. World Applied Sciences Journal 13 (10):2203 – 2210.

[7]. Taylor, M. 2006. Wave Equations and Diffraction. In Elsevier Encyclopedie of Mathematical Physics.

[8]. Howe, M. 2003 .Theory of Vortex Sound. Cambridge Texts in Applied Mathematics.

[9]. Linear, B. 2000. Partial Differential Equations for Scientists and Engineers. Boston Basel Berlin.

[10]. Asmar, N. 2004. Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems. Prentice Hall . New Jersey.